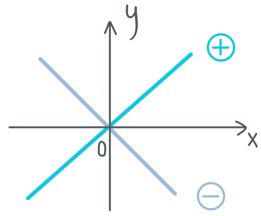
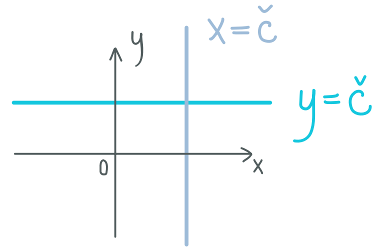
FUNKCE

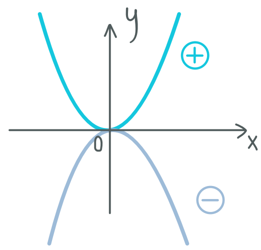
GRAFY FUNKCÍ

$y = x^1$

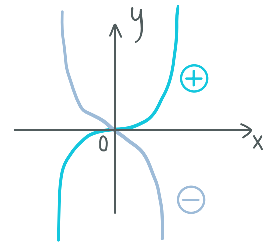




$y = x^n$

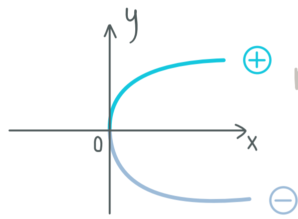


n.... sudé

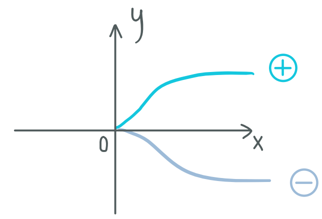


n...liché

$y = \sqrt[n]{x}$

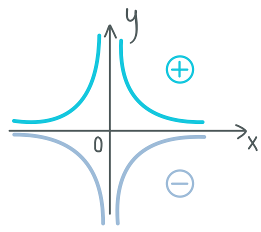


n.... sudé

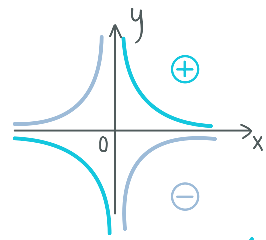


n...liché

$y = \frac{1}{x^n}$

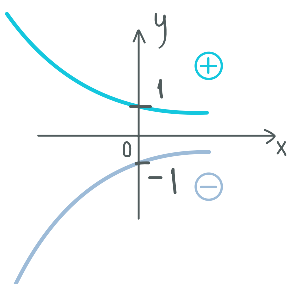


n.... sudé

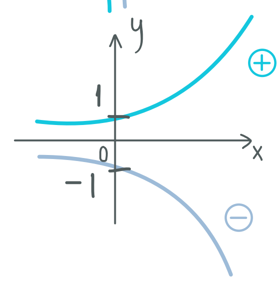


n...liché

$y = a^x$

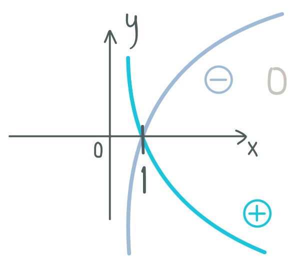


$0 < a < 1$

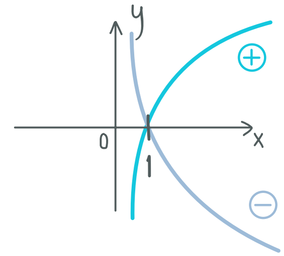


$a > 1$

$y = \log_a x$



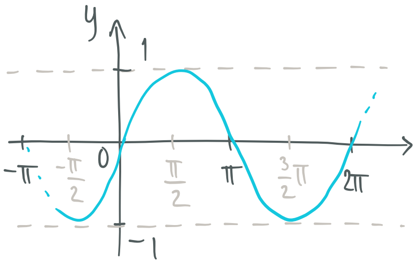
$0 < a < 1$



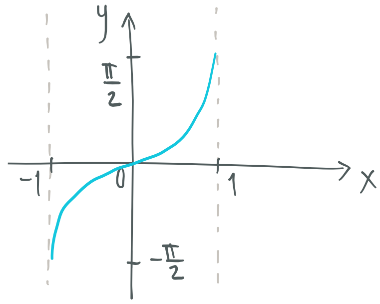
$a > 1$

GONIOMETRICKÉ FUNKCE

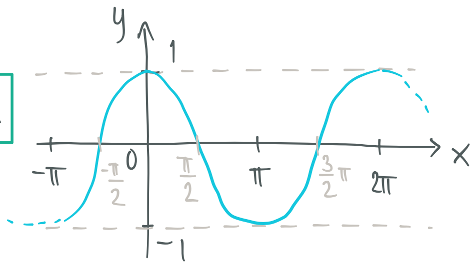
$y = \sin x$



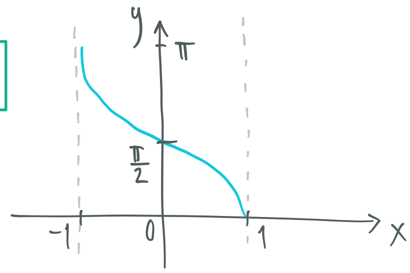
$y = \arcsin x$



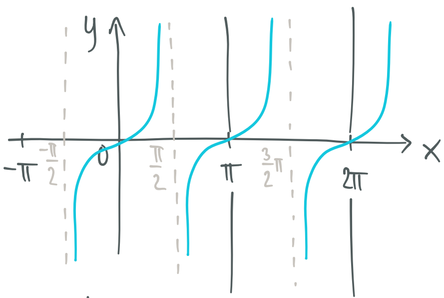
$y = \cos x$



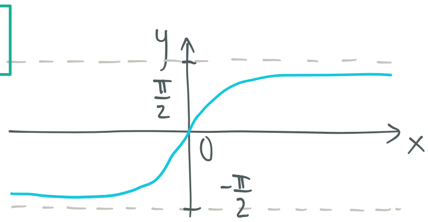
$y = \arccos x$



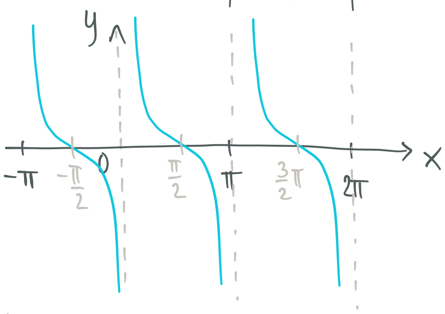
$y = \mathrm{tg}\, x$



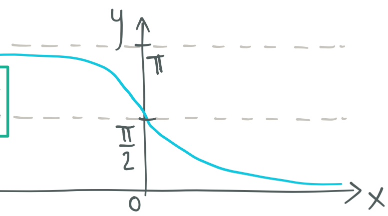
$y = \mathrm{arctg}\, x$



$y = \mathrm{cotg}\, x$



$y = \mathrm{arccotg}\, x$



DEFINIČNÍ OBORY

I) nelze dělit nulou — $y = \frac{1}{x}$ — $\boxed{x \neq 0}$

II) logaritmuj čísla kladná — $y = \log x$ — $\boxed{x > 0}$

III) odmocňuj čísla nezáporná — $y = \sqrt{x}$ — $\boxed{x \geq 0}$

↳ SUDÉ ODMOC.

+ pozor na: arcsinx, arccosx, tgx, cotgx

DOUČOVÁNÍ S PĚŤOU

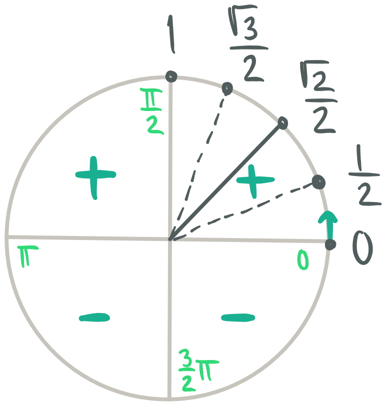
GONIOMETRIE

TABULKA HODNOT

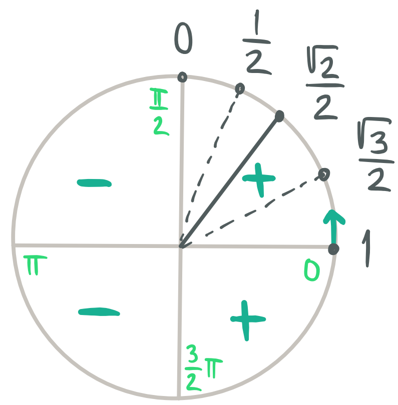
stupně	radiány	sinx	cosx	tgx	cotgx
$0°$	0	0	1	0	–
$30°$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$45°$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$60°$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$90°$	$\frac{\pi}{2}$	1	0	–	0

JEDNOTKOVÉ KRUŽNICE

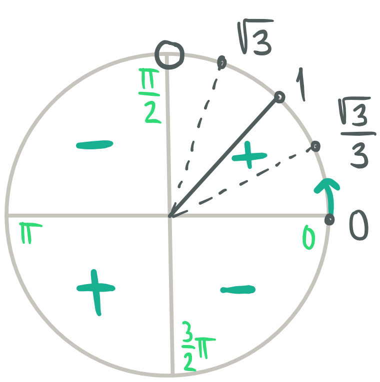
sinx



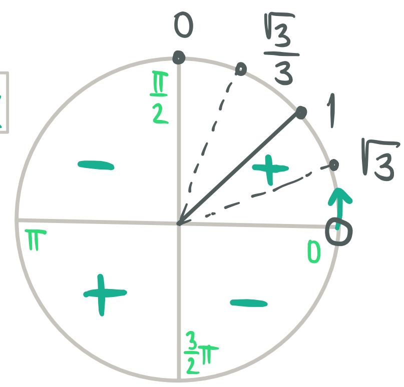
cosx



tgx



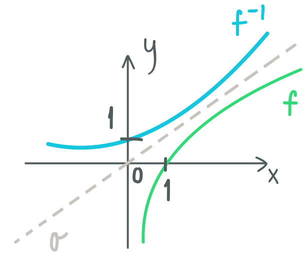
cotgx



DOUČOVÁNÍ S PÉŤOU

VLASTNOSTI FUNKCÍ

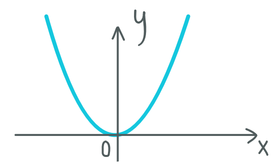
- **inverzní** $f^{-1}(x)$
  - souměrné dle osy I. a III. kvadrantu
  - vyměň x za y a naopak → vyjádři $y =$
  - $H(f^{-1}) = D(f)$; $H(f) = D(f^{-1})$



- **sudá / lichá**
  - místo x napiš $-x$ → uprav → vyjde:

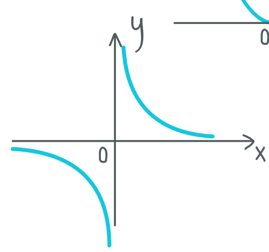
A) stejně $f(-x) = f(x)$ SUDÁ

- souměrná podle osy y



B) s minusem $f(-x) = -f(x)$ LICHÁ

- souměrná podle počátku



- **periodická** $f(x+kp)$
  - perioda: $\sin(mx)$; $\cos(mx)$ $\boxed{P = \frac{2\pi}{m}}$
    $\mathrm{tg}(mx)$; $\mathrm{cotg}(mx)$ $\boxed{P = \frac{\pi}{m}}$
  - perioda více funkcí nsn; argument lineární

- **složená** $f \circ g \circ h$
  ↳ f složeno z g, a to složeno z h
  - u předpisu g dosazuj za x celou funkci h
    toto celé pak dosazuj za x u funkce f

LIMITY FUNKCÍ

PRÁCE S NEKONEČNEM

$\check{c} + \infty = \infty$ $\qquad \infty^2 = \infty$ $\qquad \dfrac{\check{c}}{\infty} = 0$

$\check{c} - \infty = -\infty$ $\qquad (-\infty)^2 = \infty$

$\check{c} \cdot \infty = \infty$ $\qquad \check{c}^{\infty} = 0 \quad (0 < \check{c} < 1)$

$-\check{c} \cdot \infty = -\infty$ $\qquad \check{c}^{\infty} = \infty \quad (\check{c} > 1)$

$\dfrac{\check{c}}{0}$ NELZE $\quad \nearrow \dfrac{\check{c}}{0^+} = \infty \qquad \searrow \dfrac{\check{c}}{0^-} = -\infty$

není definováno: $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$, 0^{∞}, 1^{∞}, ∞^0, 0^0

LIMITY

I) polynomy: vyber největší mocninu, zbytek škrtni

II) zlomky: největší mocninu v čitateli i jmenovateli

- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cancel{n^3}}{\cancel{n^3}} = \dfrac{1}{1} = 1$ — ČÍSLO
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cancel{n^4}}{\cancel{n^3}} = \dfrac{n}{1} = \infty$ — ± NEKONEČNO
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cancel{n^3}}{\cancel{n^4}} = \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{\infty} = 0$ — NULA

III) typ $\infty - \infty$: usměrnit → vzorec $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

IV) Eulerovo číslo: $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$ $\qquad$ n… musí být stejné

V) součty posloupností: aritmetická $\qquad S_n = \dfrac{n}{2}(a_1 + a_n)$

geometrická $\qquad S_n = a_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}$

L'HOSPITALOVO PRAVIDLO

- pro podíly $\dfrac{\infty}{\infty}$; $\dfrac{0}{0}$ (vyrobit podíl)
- derivuj čitatele a jmenovatele zvlášť

$$\boxed{\dfrac{f'(x)}{g'(x)}}$$

DERIVACE

VZORCE

$y = x^n \longrightarrow y' = n \cdot x^{n-1}$

$y = x \longrightarrow y' = 1$

$y = a \longrightarrow y' = 0$

$y = e^x \longrightarrow y' = e^x$

$y = a^x \longrightarrow y' = a^x \cdot \ln a$

$y = \ln x \longrightarrow y' = \frac{1}{x}$

$y = \log_a x \longrightarrow y' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

$y = \sin x \longrightarrow y' = \cos x$

$y = \cos x \longrightarrow y' = -\sin x$

$y = \operatorname{tg} x \longrightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$y = \operatorname{cotg} x \longrightarrow y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$y = \arcsin x \longrightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y = \arccos x \longrightarrow y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y = \operatorname{arctg} x \longrightarrow y' = \frac{1}{1+x^2}$

$y = \operatorname{arccotg} x \longrightarrow y' = -\frac{1}{1+x^2}$

PRAVIDLA

- sčítání a odčítání $\quad y = f \pm g \longrightarrow y = f' \pm g'$
- násobení $\quad y = f \cdot g \longrightarrow y = f' \cdot g + f \cdot g'$
- dělení $\quad y = \frac{f}{g} \longrightarrow y = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
- složená funkce $\quad y = f(g) \longrightarrow y = f'(g) \cdot g'$

↳ rozbaluj zvenku dovnitř – zleva doprava

TAYLORŮV POLYNOM

– n-tého stupně, k funkci f(x), v bodě c

$$T_n(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c)^1 + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

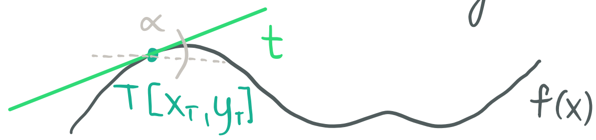
APLIKACE DERIVACE

GEOMETRICKÝ VÝZNAM

TEČNA $t: y = k_T x + q$

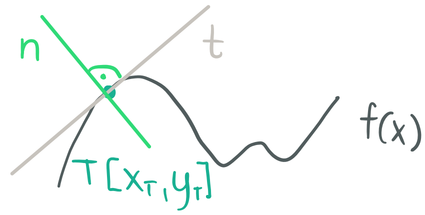
$\boxed{f'(x_T) = k_T}$ derivace v bodě = směrnice tečny

$k_T = \mathrm{tg}\,\alpha$



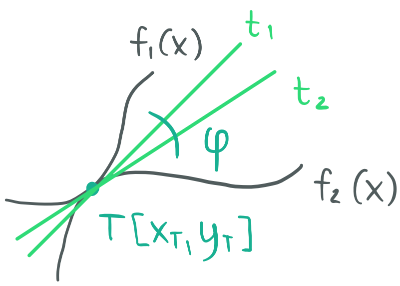
NORMÁLA $n: y = k_N x + q$

$\boxed{k_N = -\frac{1}{k_T}}$ přímky kolmé



ODCHYLKA KŘIVEK

$\boxed{\mathrm{tg}\,\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}\right|}$



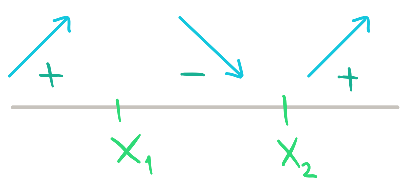
MONOTÓNIE FUNKCE

1) urči Df
2) derivace f
   - A) $f'(x) = 0$
   - B) $f'(x)$ neexistuje

   } body: x = číslo
   EXTRÉMY
3) osa – nanes body + kontrola Df
4) mezilehlé body do derivace

   $f'(c) > 0$ + ↗ ROSTOUCÍ

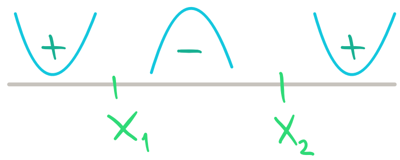
   $f'(c) < 0$ – ↘ KLESAJÍCÍ
5) výsledek: intervaly (ne ∪ ale ;)



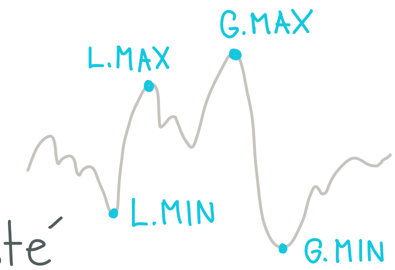
KONVEXITA / KONKÁVITA FUNKCE

1) urči D_f
2) druhá derivace f
   - A) $f''(x) = 0$
   - B) $f''(x)$ neexistuje

   } body: $x =$ ČÍSLO INFLEXNÍ B.
3) osa – nanes body + kontrola D_f



4) mezilehlé body do derivace
   - $f''(c) > 0$ + ∪ KONVEXNÍ
   - $f''(c) < 0$ − ∩ KONKÁVNÍ
5) výsledek: intervaly (ne ∪ ale ;)

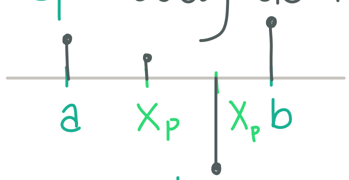


GLOBÁLNÍ EXTRÉMY FUNKCE

– na intervalu: ⟨a, b⟩ vždy × (a, b) nejisté

1) první derivace
   - A) $f'(x) = 0$
   - B) $f'(x)$ neexistuje

   } body: $x_p =$ ČÍSLO PODEZŘELÉ
2) patří body x_p do intervalu (a, b)?
3) osa s body x_p a intervalem (a, b)
4) dosaď podezřelé x_p a krajní a, b body do funkce $f(x) = \dots$ a vynes na osu



5) výsledek:

A) nejmenší / největší hodnota leží v intervalu → MIN / MAX
B) nejmenší / největší hodnota neleží v intervalu → neexistuje MIN / MAX
C) $f(x) = \pm\infty$ a neleží v intervalu → neexistuje MIN / MAX

LINEÁRNÍ ALGEBRA

GAUSSOVA ELIMINACE

$\begin{pmatrix} - & - & - \\ 0 & - & - \\ 0 & 0 & - \end{pmatrix}$ → hlavní diagonála $\neq 0$

pod hl. diagonálou vyrob nuly

→ řádky lze prohodit
→ řádky lze násobit / dělit ($č \neq 0$)
→ řádky lze spolu sčítat / odčítat

LINEÁRNÍ ZÁVISLOST

LZ → vznikne nulový řádek, nebo řádek, kt. je násobkem jiného (pozor: $\begin{matrix} 0 & 0 & č \\ 0 & 0 & č \end{matrix}$)

LN → všechny ostatní případy

BÁZE

1) počet vektorů = dimenzi (řádků = sloupců)
2) vektory musí být LN

HODNOST MATICE

$h(A)$ = max. počet LN řádků

SOUSTAVA LINEÁRNÍCH ROVNIC

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & = č \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & \boxed{-} & \boxed{-} \end{array}\right)$$

↑ řešení: zdola nahoru

3 situace:

1. $z = č$, $y = č$, $x = č$ } 1 ŘEŠ
2. $0z = č$, $0 \neq č$ } Ø ŘEŠ
3. $0z = 0$, $0 = 0$ } ∞ ŘEŠ → parametr

- **FROBENIOVA VĚTA**

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & = \check{c} \end{array} \\ \underbrace{\left(\underbrace{\begin{array}{ccc} - & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{array}}_{A} \middle| \begin{array}{c} - \\ - \\ - \end{array}\right)}_{A'} \end{array}$$

$h(A) \neq h(A') \rightarrow \emptyset$ řešení

$h(A) = h(A') \rightarrow h(A) = n \rightarrow 1$ řešení

$\qquad\qquad\qquad\;\; \searrow h(A) = n \rightarrow \infty$ řešení

A... krátká A'... rozšířená n.... počet řádků

- **HOMOGENNÍ SOUSTAVA ROVNIC**

= vpravo samé nuly

– vždy existuje řešení → TRIVIÁLNÍ ŘEŠ. $(x=0, y=0, z=0)$

- **LINEÁRNÍ KOMBINACE**

– když existují konstanty $\boxed{\vec{v} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + c_3\vec{u}_3 \ldots}$

– vektory do sloupců → rovnice : má řešení → JE LK

nemá řešení → NENÍ LK

- **LINEÁRNÍ OBAL**

= množina všech LK: $\mathcal{L}\langle u_1, u_2, \ldots \rangle$

– vektory do sloupců → rovnice : má řešení → JE V LO

nemá řešení → NENÍ V LO

– dimenze LO – jako hodnost → vektory do řádků

DOUČOVÁNÍ S PĚTOU

MATICE

- matice $(ř, s)$
- čtvercová = stejný počet řádků a sloupců
- transponovaná A^T = prohoď řádky a sloupce
- jednotková E = na hl. diagonále jedničky, všude jinde nuly $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

OPERACE S MATICEMI

1) násobení/dělení konstantou
   - každý člen vynásob/vyděl zvlášť
2) sčítání/odčítání matic
   - sečti/odečti prvky na stejných pozicích
3) násobení matic $(A \cdot B \neq B \cdot A)$
   - $(ř, s) \cdot (ř', s') \rightarrow$ lze když $s = ř'$, výsledek $(ř, s')$
   - 1. řádek krát 1., 2., 3. .... sloupec
4) umocňování matic
   - jako násobení $(A^2 = A \cdot A)$
5) dělení matic
   - nelze, musí se násobit maticí inverzní $\boxed{A \cdot A^{-1} = E}$
   - násobení zprava/zleva

DETERMINANT $\det A$

= číslo ze čtvercové matice

- $\det A = 0 \rightarrow$ LZ ; $\det A \neq 0 \rightarrow$ LN

INVERZNÍ MATICE A^{-1}

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^{ADJ}} \qquad \det A \neq 0$$

ADJUNGOVANÁ MATICE A^{ADJ}

2×2: 1) prohoď prvky na hl. diagonále

2) u ostatních změň znaménka +/−

3×3:

$A_{11} = +\begin{vmatrix} - & - \\ - & - \end{vmatrix}$ $\quad A_{21} = -\begin{vmatrix} - & - \\ - & - \end{vmatrix}$ $\quad A_{31} = +\begin{vmatrix} - & - \\ - & - \end{vmatrix}$

$A_{12} = -\begin{vmatrix} - & - \\ - & - \end{vmatrix}$ $\quad A_{22} = +\begin{vmatrix} - & - \\ - & - \end{vmatrix}$ $\quad A_{32} = -\begin{vmatrix} - & - \\ - & - \end{vmatrix}$

$A_{13} = +\begin{vmatrix} - & - \\ - & - \end{vmatrix}$ $\quad A_{23} = -\begin{vmatrix} - & - \\ - & - \end{vmatrix}$ $\quad A_{33} = +\begin{vmatrix} - & - \\ - & - \end{vmatrix}$

CRAMEROVO PRAVIDLO

- D.... celkový determinant
- D_x... nahraď $x$ový sloupec pravou stranou

ŘEŠENÍ SOUSTAVY

$$\boxed{x = \frac{D_x}{D}} \quad \boxed{y = \frac{D_y}{D}} \quad \boxed{z = \frac{D_z}{D}}$$

ANALYTICKÁ GEOMETRIE

– vektory $\vec{u}(u_x, u_y, u_z)$ $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$

- **SOUČIN**

1) SKALÁRNÍ $\quad \vec{u} \cdot \vec{v}$ = ČÍSLO

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y + u_z \cdot v_z$$

2) VEKTOROVÝ $\quad \vec{u} \times \vec{v}$ = VEKTOR

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z & u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z & v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = (\underset{1.}{\_\_\_}\,;\,\underset{2.}{\_\_\_}\,;\,\underset{3.}{\_\_\_})$$

1. 2. 3.

↘ ⊕ ↙ ⊖

- **VELIKOST VEKTORU** $\quad |\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$

- **STŘED ÚSEČKY** $\quad A[x_A, y_A, z_A]$ $B[x_B, y_B, z_B]$

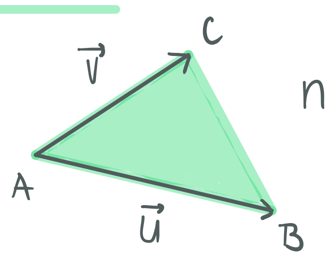
→ "průměr" $\quad S\left[\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right]$

- **TĚŽIŠTĚ TROJÚHELNÍKA**

→ "průměr" třema $\quad T\left[\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right]$

- **OBSAH TROJÚHELNÍKA**

$$\boxed{S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot |\vec{u} \times \vec{v}|}$$

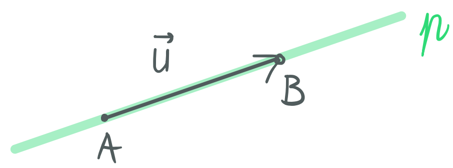


nekrátit vektory

DOUČOVÁNÍ S PÉŤOU

PŘÍMKA

→ rovnice: PARAMETRICKÁ



$$\begin{aligned} x &= \boxed{x_A} + \boxed{u_x}\, t \\ y &= \boxed{y_A} + \boxed{u_y}\, t \\ z &= \boxed{z_A} + \boxed{u_z}\, t \end{aligned}$$

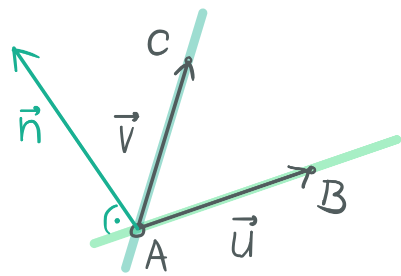
BOD VEKTOR

$\vec{u} = \vec{AB} = B - A = (u_x, u_y, u_z)$

↳ směrový vektor

$t \in \mathbb{R}$ (parametr)

ROVINA



→ rovnice: PARAMETRICKÁ

$$\begin{aligned} x &= \boxed{x_A} + \boxed{u_x}\, t + \boxed{v_x}\, s \\ y &= \boxed{y_A} + \boxed{u_y}\, t + \boxed{v_y}\, s \\ z &= \boxed{z_A} + \boxed{u_z}\, t + \boxed{v_z}\, s \end{aligned}$$

BOD VEKTOR VEKTOR

$\vec{u}, \vec{v}$.... směrové vektory

$t, s \in \mathbb{R}$ (parametry)

→ rovnice: OBECNÁ

$ax + by + cz + d = 0$

$\vec{n}\,(a, b, c)$ $\boxed{\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}}$

↳ normálový vektor

↳ dosaď do rce bod – dopočti d

PRŮSEČÍK / PRŮSEČNICE

→ dosaď jedno do druhého

– když 3 rce o 2 nez. ⇒ 1) použij první dvě
2) dosaď do třetí

VZÁJEMNÁ POLOHA

1) DVOU PŘÍMEK – směrové vektory $\vec{u}, \vec{v}$

I) jsou $\vec{u}, \vec{v}$ LZ ? → ANO ⇒ rovnoběžné ∥ ; NE ⇒ krok II)

II) mají PRŮSEČÍK ? → ANO ⇒ různoběžné ✕ ; NE ⇒ mimoběžné

2) DVOU ROVIN – normálové vektory $\vec{n}, \vec{m}$

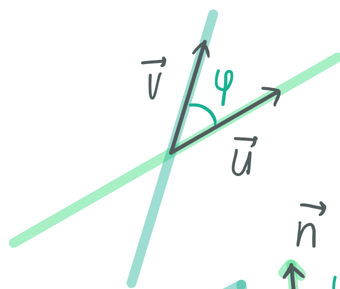
I) jsou $\vec{n}, \vec{m}$ LZ ? → ANO ⇒ rovnoběžné ∥ ; NE ⇒ různoběžné ✕

3) PŘÍMKY A ROVINY – směrový $\vec{u}$, normálový $\vec{n}$

I) mají PRŮSEČÍK ? → ANO ⇒ různoběžné ✕ ; NE ⇒ rovnoběžné ∥

ODCHYLKA

1) DVOU PŘÍMEK – směrové vektory $\vec{u}, \vec{v}$

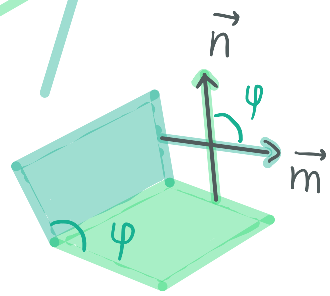


$$\cos\varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

skalární součin

velikost vektoru

2) DVOU ROVIN – normálové vektory $\vec{n}, \vec{m}$



$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{m}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{m}|}$$

skalární součin

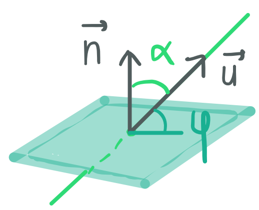
velikost vektoru

3) PŘÍMKY A ROVINY – směrový $\vec{u}$, normálový $\vec{n}$

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$$

skalární součin

velikost vektoru



NEBO: $\varphi = 90° - \alpha$

DOUČOVÁNÍ S PĚŤOU

VZDÁLENOST

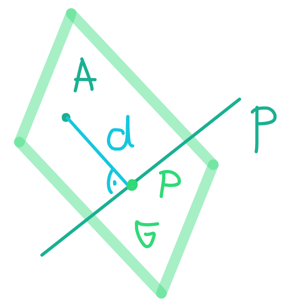
1) BODU OD ROVINY

bod $A[x, y, z]$

rovina $\varrho: ax+by+cz+d=0$

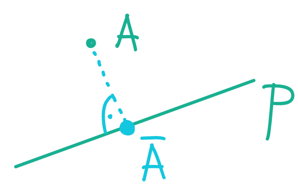
$$|A\varrho| = \frac{|ax+by+cz+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

2) BODU OD PŘÍMKY



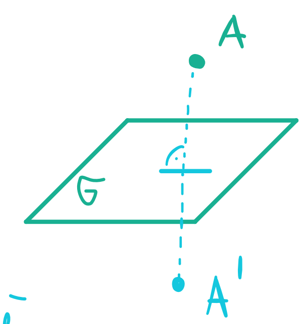
- rovina σ: $\sigma \perp p$; $\sigma \in A$
- průsečík P: $P = \sigma \cap p$
- vzdálenost dvou bodů $d = |AP|$

KOLMÝ PRŮMĚT



- rovina σ: $\sigma \perp p$; $\sigma \in A$
- průsečík $\bar{A}$: $\bar{A} = \sigma \cap p$ kolmý průmět

SOUMĚRNĚ SDRUŽENÝ BOD

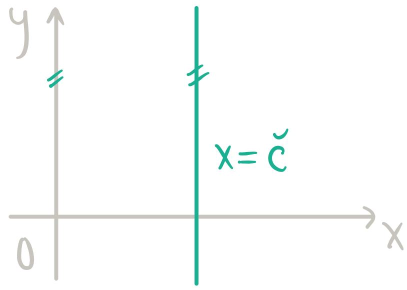


- přímka p: $p \perp \sigma$; $p \in A$
- průsečík P: $P = p \cap \sigma$

  ↳ střed úsečky AA' souměrně sdružený bod

ASYMPTOTY

- **SVISLÉ**

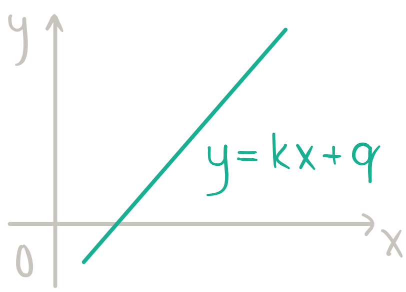


body nejsou v Df (ℝ \ {č})

rovnice: $\boxed{x = \check{c}}$

ověření: $\lim\limits_{x \to \check{c}^+} f(x) = \pm\infty$; $\lim\limits_{x \to \check{c}^-} f(x) = \pm\infty$ } alespoň jedno vyjde $\pm\infty$ → je to asymptota

- **ŠIKMÉ**



body jsou v Df

rovnice: $\boxed{y = kx + q}$

výpočet: $\boxed{k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right)}$

$$\boxed{q = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - kx\right)}$$

* může se objevit L'Hospitalovo pravidlo