# INTEGRACE

## VZORCE

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad n \neq -1$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{cotg} x + c$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$$

$$\int e^x\,dx = e^x + c$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int 1\,dx = x + c$$

## PRAVIDLA

- sčítání a odčítání $\int (f \pm g)\,dx = \int f\,dx \pm \int g\,dx$

  ↳ integruj každou funkci zvlášť

- konstanta $\int K \cdot f\,dx = K \int f\,dx$

  ↳ konstantu vytkni před integrál

* KONSTANTY: $\pi, \sqrt{\pi}, \pi^3, e, \frac{e}{2}, 3e, \ln 5, \log 7, \frac{1}{\ln 2}, \sin\frac{\pi}{2}, \operatorname{tg}\pi, \dots$

## SPECIALITKY

I) $\int \frac{f'}{f}\,dx = \ln|f| + c$ — DERIVACE / FUNKCE

II) $\int f(ax+b)\,dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c$ — SLOŽENÁ FUNKCE, KDE UVNITŘ JE FCE LINEÁRNÍ

## PER PARTES

1) součin funkcí
2) arc.....
3) $\ln x$ / $\log x$

$$\int f\cdot g\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = f & v' = g \\ u' = f' & v = \int g \end{array} \right| = \underbrace{u\cdot v}_{1.} - \int \underbrace{u'\cdot v}_{2.}\,dx$$

DERIVUJ — INTEGRUJ

- DERIVUJ: $x^n$ – co se zmenšuje, arc..., $\ln x$, $\log x$
- TRIKY: per partes víckrát (ne rodinka); přidat jedničku

## SUBSTITUCE

↳ vidím funkci a její derivaci

a) o 1 menší exponent: $x^n$ a $x^{n-1}$

b) jiné funkce: $\sin x$ a $\cos x$; $\ln x$ a $\frac{1}{x}$; $\operatorname{arctg} x$ a $\frac{1}{1+x^2}$ ....

$$\int f(x)\,f'(x)\,dx = \left| \begin{array}{l} t = f(x) \\ dt = f'(x)\,dx \end{array} \right| = \int f(t)\,dt = t + C = x + C$$

DERIVUJ

BUBLINA

VRAŤ SE DO SUBSTITUCE

# PARCIÁLNÍ ZLOMKY

$$\int \frac{\text{funkce}}{\text{funkce}}\,dx = \int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

1) Je stupeň $P(x) \geq Q(x)$ ? → ANO: dělit $P:Q$
→ NE: krok 2)

2) $Q(x)$ – na součin (vytknutí, vzorec, ...)

3) stupeň $Q(x)$ = počet zlomků $\quad \frac{A}{\quad} + \frac{B}{\quad} + \frac{C}{\quad}$

4) společný jmenovatel

5) 1 rovnice – hledej $A, B, C$.... (nulové body / $x^0$:... $x^1$:....)

6) $A$ = číslo ; $B$ = číslo ; ... → dosaď do zlomků

7) parciální zlomky zintegruj

- $$\int \frac{\text{konstanta}}{\text{fce lineární}}\,dx = \ln|\text{fce lineární}| + c$$

- $$\int \frac{\text{konstanta}}{(\text{fce lineární})^n}\,dx = \frac{(\text{fce})^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{a} + c$$ (II. spec.)

- $$\int \frac{\text{kons. derivace}}{\text{funkce}}\,dx = \ln|\text{fce}| + c$$ (I. spec.)

- $$\int \frac{\text{konstanta}}{\text{fce kvadratická}}\,dx = \text{TAHÁK B)}$$

DOUČOVÁNÍ S PĚŤOU

# URČITÁ INTEGRACE

## URČITÝ INTEGRÁL

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a) = \text{ČÍSLO}$$

→ meze dosadit HORNÍ minus DOLNÍ

## NEVLASTNÍ INTEGRÁL

= určitý integrál s $\pm\infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_{-\infty}^{\infty} = F(\infty) - F(-\infty) = \text{ČÍSLO}$$

## KONVERGENCE INTEGRÁLU

= kdy je konečný? → nesmí vyjít $\pm\infty$

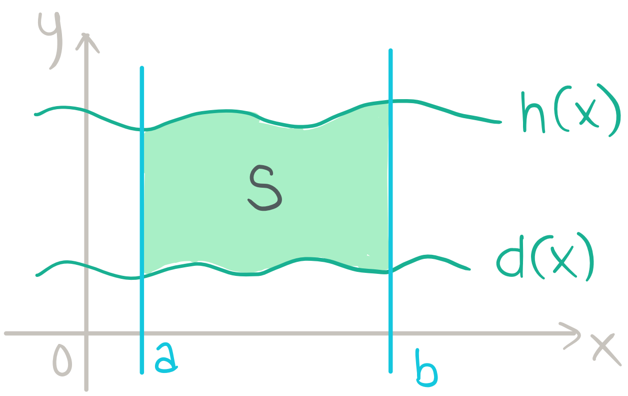
$$\int_a^b x^p\,dx = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_a^b = \frac{1}{č}\left[x^{p+1}\right]_a^b = b^{p+1} - a^{p+1}$$

A) $0^p$ $\boxed{p>0}$ $0^{+č}$ (chci $0^{+č} = 0$; nechci $0^{-č} = \infty$)

B) $\infty^p$ $\boxed{p<0}$ $\infty^{-č}$ (chci $\infty^{-č} = 0$; nechci $\infty^{č} = \infty$)

# APLIKACE INTEGRACE

## OBSAH PLOCHY



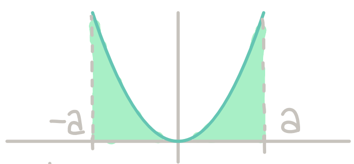

$$S = \int_a^b h(x) - d(x)\,dx$$

a, b ............ meze ⟼ OSA x

h(x), d(x).... funkce ↥ OSA y

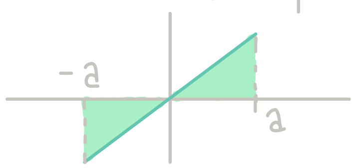
→ symetrický interval

a) funkce sudá



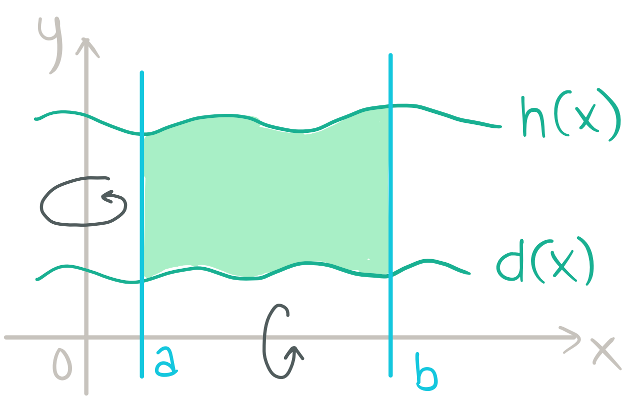

$$S = 2\cdot\int_0^a f(x)\,dx$$

b) funkce lichá




$$S = \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

## OBJEM TĚLESA

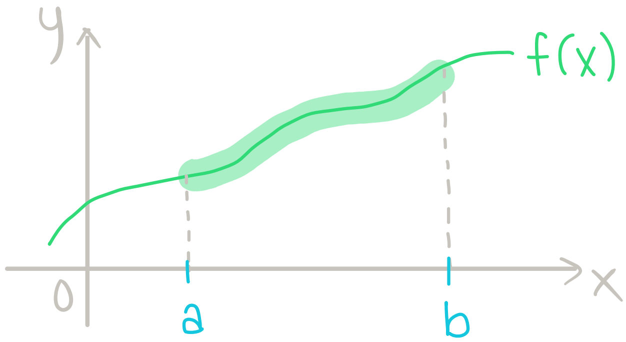



$$V_x = \pi \int_a^b h^2(x) - d^2(x)\,dx$$

$$V_y = 2\pi \int_a^b x\cdot h(x) - x\cdot d(x)\,dx$$

DOUČOVÁNÍ S PÉŤOU

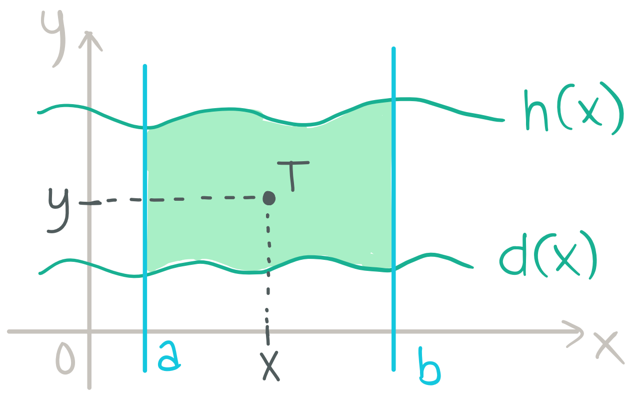
# DÉLKA KŘIVKY




$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'_{(x)})^2}\, dx$$

→ vzorec $(A-B)^2 \rightarrow (A+B)^2$

# TĚŽIŠTĚ PLOCHY




I) hmotnost

$$m = \int_a^b h(x) - d(x)\, dx$$ jako obsah

II) statický moment

a) k ose x $\quad S_x = \frac{1}{2}\int_a^b h^2(x) - d^2(x)\, dx$

b) k ose y $\quad S_y = \int_a^b x \cdot h(x) - x \cdot d(x)\, dx$

III) těžiště $T[x,y]$ $\quad T\left[\frac{S_y}{m}; \frac{S_x}{m}\right]$ pozor naopak!

# FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH

- 1 proměnná $f(x) = y$
- 2 proměnné $f(x,y) = z$

## PARCIÁLNÍ DERIVACE

$\frac{\partial f}{dx}$ ; $\frac{\partial f}{dy}$ ..... zderivuj dle $x/y$; ostatní jsou konstanty

$\frac{\partial^2 f}{dx^2}$ ; $\frac{\partial^2 f}{dy^2}$ ..... zderivuj znova podle $x/y$

$$\frac{\partial^2 f}{dx\,dy} = \frac{\partial^2 f}{dy\,dx}$$ záměnnost funkcí

## GRADIENT

= VEKTOR z parciálních derivací

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{dx} ; \frac{\partial f}{dy} ; \frac{\partial f}{dz}\right)$$

## SMĚROVÁ DERIVACE

= ve směru VEKTORU $\vec{u}$

$$\boxed{\frac{\partial f}{du}(C) = \nabla f \cdot \vec{u_j}}$$

skalární součin $\Rightarrow$ ČÍSLO

$\vec{u_j}$... jednotkový vektor $\vec{u_j}\left(\frac{u_x}{|u|} ; \frac{u_y}{|u|} ; \frac{u_z}{|u|}\right)$

$|u|$... velikost vektoru $|u| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$

- směrová derivace je
  - max. v $\oplus$ gradientu
  - min. v $\ominus$ gradientu

## IMPLICITNÍ FUNKCE $f(x,y)=0$

**2D:** $f(x,y)$

$$x'(y) = -\frac{\frac{\partial f}{dy}}{\frac{\partial f}{dx}} \qquad y'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{dx}}{\frac{\partial f}{dy}}$$

**3D:** $f(x,y,z)$

$$\frac{\partial z}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{dx}}{\frac{\partial f}{dz}} \qquad \frac{\partial z}{dy} = -\frac{\frac{\partial f}{dy}}{\frac{\partial f}{dz}}$$

## TEČNA + NORMÁLA (2D)

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = \ldots\ldots\ldots \rightarrow T: \ldots\ldots \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \ldots\ldots\ldots \rightarrow T: \ldots\ldots \end{array}\right\} \nabla f(a,b)$$

$t: ax + by + c = 0$

$\vec{n} \perp \nabla f : \vec{n}(b,-a) \qquad n: bx - ay + c = 0$

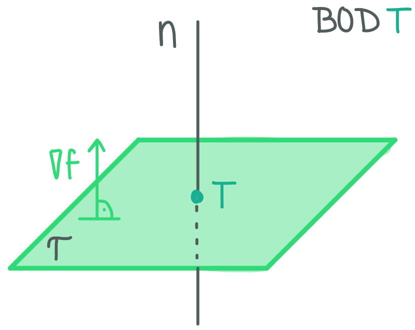
## TEČNÁ ROVINA + NORMÁLA (3D)

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = \ldots\ldots\ldots \rightarrow T: \ldots\ldots \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \ldots\ldots\ldots \rightarrow T: \ldots\ldots \\ \frac{\partial f}{\partial z} = \ldots\ldots\ldots \rightarrow T: \ldots\ldots \end{array}\right\} \nabla f(a,b,c)$$

$$n: \begin{aligned} x &= x_0 + a\,t \\ y &= y_0 + b\,t \\ z &= z_0 + c\,t \end{aligned}$$

BOD T VEKTOR $\nabla f$

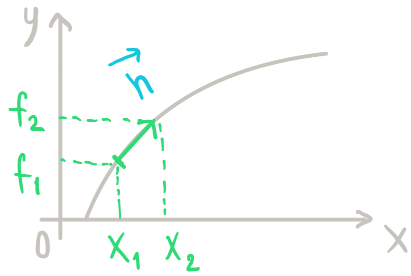
$T: ax + by + cz + d = 0$



# TOTÁLNÍ DIFERENCIÁL

- dáno: bod $C[x,y]$; funkce $f(x,y)$; $\} \nabla f$

  přírůstek $\vec{h}\,(h_x, h_y)$




$$\boxed{Df(C) = \nabla f \cdot \vec{h}}$$

skalární součin
$\Rightarrow$ ČÍSLO

# LOKÁLNÍ EXTRÉMY

$\boxed{2D}$: $f(x,y)$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{dx} &= 0 \\ \frac{\partial f}{dy} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

PODEZŘELÝ BOD

$P[x,y]$

$$D^2f(P) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{dx^2} & \frac{\partial^2 f}{dxdy} \\ \frac{\partial^2 f}{dydx} & \frac{\partial^2 f}{dy^2} \end{pmatrix}$$

$D_1$, $D_2$

$D_N = 0$ ............ nic neříkající

$D_2 < 0$ ............ sedlový bod

$D_2 > 0$ $\quad D_1 > 0$ .... lok. minimum

$D_2 > 0$ $\quad D_1 < 0$ .... lok. maximum

$\boxed{3D}$: $f(x,y,z)$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{dx} &= 0 \\ \frac{\partial f}{dy} &= 0 \\ \frac{\partial f}{dz} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

STACIONÁRNÍ BOD

$P[x,y,z]$

$$D^2f(P) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{dx^2} & \frac{\partial^2 f}{dxdy} & \frac{\partial^2 f}{dxdz} \\ \frac{\partial^2 f}{dydx} & \frac{\partial^2 f}{dy^2} & \frac{\partial^2 f}{dydz} \\ \frac{\partial^2 f}{dzdx} & \frac{\partial^2 f}{dzdy} & \frac{\partial^2 f}{dz^2} \end{pmatrix}$$

$D_1$, $D_2$, $D_3$

$D_N = 0$ ............ nic neříkající

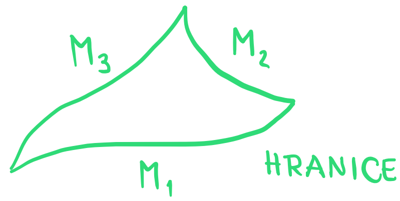
$D_3 > 0 \quad D_2 > 0 \quad D_1 > 0$ .... lok. minimum

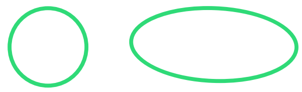
$D_3 < 0 \quad D_2 > 0 \quad D_1 < 0$ .... lok. maximum

JINAK ............ sedlový bod

# VÁZANÉ EXTRÉMY

– vzhledem k množině $M: g(x,y)=0$



KULATÉ ÚTVARY

## I. ZPŮSOB:

1) Lagrangeova funkce $\boxed{L(x,y) = f(x,y) + \lambda \cdot g(x,y)}$

2) $\frac{\partial L}{dx} = 0 \quad \frac{\partial L}{dy} = 0$ } BODY $P[x,y]$ $x,y$.... funkcí $\lambda$

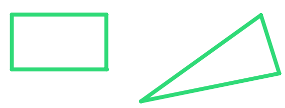
3) $x,y$.... dosaď do množiny $M$

→ 1 rce o 1 neznámé → $\lambda$ = číslo → dosaď

4) pěkný podezřelý bod $P[x,y]$

5) matice $D^2L(P) = \begin{pmatrix} - & - \\ - & - \end{pmatrix}$ → min./max./sedl.bod

## II. ZPŮSOB:



HRANATÉ ÚTVARY

1) množinu $M$ vyjádři $\boxed{y = \ldots\ldots}$

2) dosaď $M$ do funkce: $f(x,y) \rightarrow f(x)$

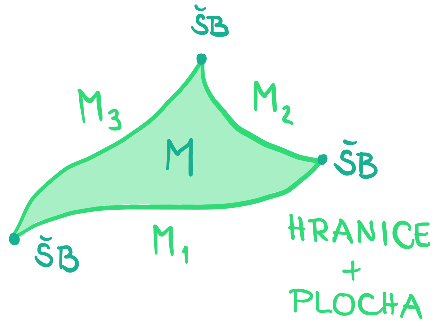
3) první derivace: $f'(x) = 0$ → $x$ = číslo } bod $P[x,y]$
$x$ dosaď do $M$ → $y$ = číslo }

4) druhá derivace: $f''(x) > 0$ ...... váz. lok. minimum
$f''(x) < 0$ ...... váz. lok. maximum

DOUČOVÁNÍ S PĚŤOU

# • GLOBÁLNÍ EXTRÉMY

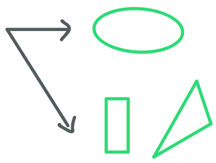
– vzhledem k množině $M$: $g(x,y) \leq 0$




I) Hledání podezřelých bodů.

1) LOKÁLNÍ $\dfrac{\partial f}{dx} = 0$ $\dfrac{\partial f}{dy} = 0$ $P_1[x,y]$

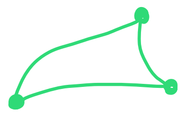
2) VÁZANÉ



$\dfrac{\partial L}{dx} = 0$ $\dfrac{\partial L}{dy} = 0$ $P_2[x,y]$

$f(x) = \dots\dots$ $f'(x) = 0$ $P_3[x,y]$

3) ŠPIČATÉ BODY



$P_4[x,y]$

II) Jsou body v množině M?

III) Spočti funkční hodnoty v bodech.

→ dosaď do zadání $f(x,y)$

→ největší hodnota → GLOBÁLNÍ MAXIMUM

nejmenší hodnota → GLOBÁLNÍ MINIMUM

# DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

## PRVNÍHO ŘÁDU $y'$

### 1) SEPARACE PROMĚNNÝCH $\quad y' = f(x) \cdot g(y)$

- přepsat $\boxed{y' = \frac{dy}{dx}}$
- $y$... doleva ; $x$... doprava : ...... $dy$ = ..... $dx$
- integrovat : ...... $+C$ na 1 stranu
- řešení : $y = \ldots\ldots + C$

### 2) HOMOGENNÍ ROVNICE $\quad y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

- ověření : $x = kx$ ; $y = ky$ → $k$ se vykrátí
- substituce : $\boxed{u(x) = \frac{y}{x}}$
  → $y = u(x) \cdot x$
  → $y' = u'(x) \cdot x + u(x)$
- separace proměnných : $u' = \frac{du}{dx}$ .....
  ↳ řešení : $u = \ldots\ldots + C$
- vrátit se do substituce
  ↳ řešení : $y = \ldots\ldots + C$

## 3) LINEÁRNÍ ROVNICE $y' + f(x) \cdot y = g(x)$

### I. HOMOGENNÍ ŘEŠENÍ $P = 0$

- $y' = -f(x) \cdot y$ → separace proměnných
- řešení: $\boxed{y_H = K \cdot \text{něco}}$ K.... konstanta

### II. PARTIKULÁRNÍ ŘEŠENÍ $P \neq 0$

- $\boxed{y_P = K(x) \cdot \text{něco}}$ K(x).... funkce
- derivace: $y_P'$ (součin fcí) → $y_P$ ; $y_P'$ do zadání
  → vždy něco vypadne → $K(x) = \ldots\ldots$

### III. CELKOVÉ ŘEŠENÍ

- součet řešení: $\boxed{y = y_H + y_P}$

## 4) EXAKTNÍ ROVNICE $M(x,y) + N(x,y) \cdot y' = 0$

- ověření: $\dfrac{\partial M}{dy} = \dfrac{\partial N}{dx}$
- potenciál $V(x,y)$ $\boxed{\dfrac{\partial V}{dx} = M}$ $\boxed{\dfrac{\partial V}{dy} = N}$

  I. INTEGRACE $\int \dfrac{\partial V}{dx} = \int M$ $V(x,y) = \ldots\ldots\ldots + g(y)$

  II. DERIVACE $\dfrac{\partial V}{dy} = \ldots\ldots\ldots + g'(y) = N$ $g(y) = \ldots\ldots$

- řešení: $V(x,y) = C$ (implicitní)